吊橋のワイヤが放物線になるわけ

小波秀雄

なんでこんなものを書いてしまったか

長い大きな吊橋では，橋桁を支えているワイヤの形が放物線になっているそうです。その理由をたまたま聞かれましたので，ごく初歩的な数学と物理を使って考えてみることにしました。

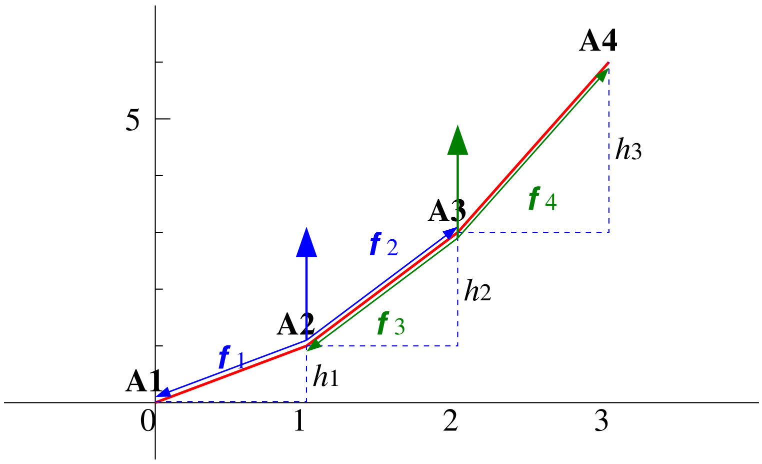
なぜそういうことを考えてみる気になったかというと，懸垂曲線（懸垂線）のことを思い浮かべたからです。質量分布が均一な糸の両端を固定して，その間の「たるみ」を作ってやると，この曲線は次の懸垂曲線に相似な形になります。

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

この形になる理由は，糸のもつ位置エネルギーが最小になる条件で変分問題を解くと簡単に得られます。解の求め方は知らなくても，結論だけ知っている人も多いでしょう。

ところが，ある人から,「長い吊橋では，その形が懸垂曲線ではなくて，放物線になる」ということを聞き，ついでにその理由をたずねられることになってしまいました。たしかにそうなっているようですが，ウェブで探せるところには数学的な説明がなくて，天下りの結論ばかりしか見つかりません。まあしかし，こういうのは私でも初等的な数学でできそうですし，ひょっとしたら教育的な使い道もありそうです。そこでいろいろと考えて説明を書いてみました。どうぞ次のページへ。

吊ったワイヤの力学



上の図をつり橋の一部と思ってください。このワイヤの通過点 **A1**, **A2**, **A3**, **A4** の座標はそれぞれ,

$$(0, 0), (1, 1), (2, 3), (3, 6)$$

としてあります。

ワイヤにかかる張力は，それぞれの区間のワイヤの向きにそって働いています。したがって，たとえば **A2** の点を両側に引っ張っている 2 つの張力をそれぞれ $\boldsymbol{f_1}$, $\boldsymbol{f_2}$ とすると，それらの合力によって吊り下げられた物体は支えられています。だから，**A2** に働く張力の合力は垂直上方を向かなければなりません。その条件は，$\boldsymbol{f_1}$ と $\boldsymbol{f_2}$ の水平方向成分の絶対値が等しく，符号（向き）が逆であることです。

すると，これらの力のベクトルの水平方向の長さが等しいということで，しかも力のベクトルの向きはワイヤの方向に向いていますから，2 つのベクトルを，**A2** から両側水平方向に 1 だけ伸ばしたときには，図のようにちょうど先端が **A1** と **A3** に届くようになります。もちろんベクトルの長さをどう取るかは任意ですから，同じ縮尺で伸び縮みさせてもいいのですが，この場合には，このような取り方が便利です。

さて，こういうふうに 2 つのベクトルを取ったとき，重りを支える力の大きさはどうなるでしょうか？これは $\boldsymbol{f_1}$ と $\boldsymbol{f_2}$ の垂直成分の和です。図では，$\boldsymbol{f_1}$ は下向き，$\boldsymbol{f_2}$ は上向きですから，この合力は図の h_2 から h_1 を引いたものになります。したがって，このワイヤの通過点の座標を使えば，上向きの力は

$$h_2 - h_1 = (3 - 1) - (1 - 0) = 1$$

でちょうど 1 だけの大きさを持つことになります。

さて，次に点 **A3** で受ける力も **A2** のそれと等しい大きさと向きになるようにするには **A4** の高さをどう決めればよいでしょうか？ここまでの議論から，すぐに， $h_3 - h_2$ もやはり 1 になるようにすればよいことが分かります。そこで,

$$h_3 - h_2 = h3 - 2 = 1$$

となります。もともとそのように図は描かれているので，図の通りに，**A2** でも **A3** でも上向きに等しい吊り上げの力が生じることになります。

数列で考える

前節の議論で，吊橋のワイヤに水平方向に等しい間隔で等しい質量のおもりをつるした時の条件がわかりました。つまり，一連の吊り点（という名前は聞いたことがありませんが，分かるでしょう）において，隣あう吊り点の高さの「差の差」が等しくなることが，その条件です。

もっと具体的に言うと，吊り点 **A0，A1，A2，...，An，...** を与えて，それらの座標が $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n), ...$ であるとしたときに，

$$h_0 = y_1 - y_0,\ h_1 = y_2 - y_1,\ h_2 = y_3 - y_2, ..., h_n = y_{n+1} - y_n, ... \tag{1}$$

とすると，

$$h_1 - h_0 = h_2 - h_1 = h_3 - h_2 = ... = h_{n+1} - h_n, ... = k\ (k\ \text{は定数}) \tag{2}$$

となることが，どの吊り点でも等しい吊り上げの力を得る条件です。

上の条件を見ると，これは数学であつかう階差数列の問題になっていることがわかります。それを使って，吊り点の高さについての一般的な関係を求めておきましょう。

式 (2) を見ると，数列 $h_0, h_1, ...$ は階差が定数で，これはいうまでもなく等差数列です。その一般項が

$$h_n = kn + h_0 \tag{3}$$

で与えられることは高校の数 I の基本問題です。ここで，問題を簡単にするために，

$$h_0 = 0$$

すなわち， $y_0 = y_1$ と，最初の 2 点が水平な位置に置かれているということにしましょう。

さて，各吊り点の高さ $y_0, y_1, y_2, ..., y_n, ...$ についても式 (1) で階差が与えられていますから，式 (3) を使って，

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= h_0 \\ y_2 - y_1 &= k + h_0 \\ &\cdots \\ y_n - y_{n-1} &= k(n-1) + h_0 \end{aligned} \tag{4}$$

を辺辺足し合わせて整理すると，

$$y_n = k\frac{n(n-1)}{2} + y_0$$

が得られます。ここで $h_0 = 0$ が使われていますから注意してください。

吊橋が放物線になるわけ

さて，水平方向の距離が等間隔になっている吊り点を考えたときに，それらの高さが

$$y_n = k\frac{n(n-1)}{2} + y_0 \tag{5}$$

で与えられることは，これらの点が放物線上にあることを意味しています。そのことはすぐに示されます。最も簡単な言い方は，式 (5) で， 水平方向の x 座標は n に比例していて，それが二次関数になっているからということです。

しかしもう少しつめた結果を導いておいた方が使えるでしょうから，具体的な関数を求めておきましょう。ここまで取り扱ってきた吊橋の吊り点の水平方向の間隔は一定ですから，それを 1 としておきます。ついでに吊り点の最初の位置 (x_0, y_0) も原点に置いておきましょう。なお，これらは単に方眼紙のスケールや原点を便利な値に設定するだけのことで，問題の本質には関係ありません。

すると，吊り点の x, y の座標は

$$\begin{aligned} y &= k\frac{x(x-1)}{2} = \frac{k}{2}(x^2 - x) \\ &= \frac{k}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{k}{8} \end{aligned} \tag{6}$$

となります。これは頂点を $(\frac{1}{2}, -\frac{k}{8})$ とする，下に凸な放物線です。

放物線を検証する

ワイヤの質量を無視できて，橋桁の質量が均等になっているような吊橋では，以上のようにワイヤが放物線になることが示されました。ところで，橋の写真を撮ってきたとして，その橋が理想的な放物線を描いているかどうかを知りたいときなど，そのワイヤの描く曲線が放物線であるかどうかを調べるには，どうするのがいいのでしょうか？

これは，ここまでの議論からとても単純な作業ですむということになります。つまり，水平方向に等しい幅ごとの高さの変化を調べてみて，それらが等差数列になっていることを確かめればいいのです。普通の模型のようなものだったら，水平に張った糸とものさしを使って調べることができるでしょう。