Bezier 曲線について

小波秀雄 2004/11/20

1 n 次 Bezier 曲線の定義

空間上に 2 点 P_0, P_n があり，その間に $n-1$ 個の参照点 $P_1, ..., P_{n-1}$ が与えられているとき，n 次 Bezier 曲線 $R(t)$ を次のように定義する。

$$R(t) = \sum_{k=0}^{n} B_k^n(t) P_k \tag{1}$$

ただし，t は媒介変数で， $0 \leq t \leq 1$ の範囲で動く。また，$B_k^n(t)$ は Bernstein 関数と呼ばれ，次のように定義される。

$$B_k^n(t) = \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k} \tag{2}$$

2 幾何学的意味

2.1 Bezier 曲線は両端の点を通る

Bernstein 関数は $\{t+(1-t)\}^n$ を二項展開した時の各項に相当する。すなわち，

$$\begin{aligned}
\{t+(1-t)\}^n &= t^n + nt^{n-1}(1-t) + \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k t^k (1-t)^{n-k} \\
&\equiv \sum_{k=0}^{n} B_k^n(t) \qquad (3)
\end{aligned}$$

ここで ${}_nC_k$ は二項係数である。そこで，

$$R(0) = P_0,\ R(1) = P_n$$

であるから，t が 0 から 1 まで動く間に $R(t)$ は P_0 から P_n まで動くことになる。つまり，$R(t)$ は両端の点を通ることになる。

また

$$\sum_{k=0}^{n} B_k^n(t) = 1$$

であるから，$R(t)$ は参照点 $P_0, P_1, \cdots, P_n$ の重みつき平均である。

2.2 端の点からの Bezier 曲線の向きは隣の参照点に向いている

さらに $t^k(1-t)^{n-k}$ という因子の形から，t が 0 から 1 まで動く間に，重みが $P_0 \to P_1 \to \cdots \to P_n$ へ順次移っていくことになる (メモ：もう少し具体的に書くこと！)。

次に，端の点 $P_0 = (x_0, y_0)$ および $P_=(x_n, y_n)$ における曲線の向きについて調べてみる。曲線を $(x(t), y(t))$, $0 \leq t \leq 1$ で表すと，

$$x(t) =_n C_0 x^0 (1-x)^n +_n C_1 x^1 (1-x)^{n-1} +_n C_2 x^2 (1-x)^{n-2} + \cdots$$

これを t で微分してから $t = 0$ とおくと，

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = n(x_1 - x_0) \tag{4}$$

同様にして

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = n(y_1 - y_0) \tag{5}$$

式 (4), (5) より

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \tag{6}$$

が得られる。つぎに同様の計算で

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \tag{7}$$

となる。

式 (6) が意味しているのは，P_0 における Bezier 曲線の接線は参照点 P_1 を通るということであり，また式 (7) が意味しているのは，P_n における Bezier 曲線の接線は参照点 P_{n-1} を通るということである。

3 具体例

$n = 2$ のとき Bernstein 関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} B_0^2(t) &= (1-t)^2 \\ B_1^2(t) &= 2t(1-t) \\ B_2^2(t) &= t^2 \end{aligned}$$

$n = 3$ のとき（多分実用的なのはこの辺までだろう）

$$
\begin{aligned}
B_0^3(t) &= (1-t)^3 \\
B_1^3(t) &= 3t(1-t)^2 \\
B_2^3(t) &= 3t^2(1-t) \\
B_3^3(t) &= t^3
\end{aligned}
$$

このように書いてみると，単純な数学的意味があることが分かる。いきなり Bernstein 関数の定義を持ち出すと難解な感じを受ける[1]が，たいしたことはない。

覚え書き

下のサイトの記事は数学的な定式化がちゃんとしているが，小さなミスがあったので修正し，自分のためのメモを作成して，ついでにいろいろ付け加えた。記事の無断転載は禁止します。

`http://www.sra.co.jp/people/aoki/Kjo/Manuals/Kjo/Curve/Bezier/Bezier.htm`

[1] 実際，ウェブ上に転がっている Bezier 曲線に関する記事は，数学的にちゃんと定式化することを敬遠しているものが大半で，資料的価値は低い。